

Μοντελοποίηση ταυτοτήτων με χρήση γεωμετρικών αναπαραστάσεων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας

Σταυρούλα Πατσιομίτου

spatsiomitou@sch.gr

Τάξη: Γ΄ Γυμνασίου –Α΄ Λυκείου

Μάθημα : Άλγεβρα

Διδακτική ενότητα: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες, Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

**Σενάριο : Μοντελοποίηση ταυτοτήτων σε στατικά και δυναμικά μέσα –
παραγοντοποίηση πολυωνύμων**

Εισαγωγή

Όταν προσέχω, ακούω ...

Όταν παρατηρώ, θυμάμαι ...

Αλλά όταν κατασκευάζω, τότε καταλαβαίνω ...

(When I listen, I hear. When I see, I remember. But when I do, then I understand....)

Οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις των ταυτοτήτων είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται από την αρχαιότητα για την επεξεργασία και κατανόηση των σχετικών αλγεβρικών εννοιών. Όπως αναφέρει ο Ε. Σταμάτης ... «Το II βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδηπεριέχει την εφαρμογή της γεωμετρίας στην Άλγεβρα και αποδίδεται κατά το μέγιστο στους Πυθαγορείους. Τα πρώτα 10 θεωρήματα αφορούν εις αλγεβρικές ταυτότητας, τας οποίας δυνάμεθα να παραστήσωμεν ως ακολούθως αν δια των γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ νοήσωμεν τμήματα ευθειών γραμμών».

Πολλές έρευνες έχουν αποδείξει ότι η χρήση υλικών για τη κατανόηση των εννοιών έχει σημαντική επίδραση στην κατανόηση τους από τους μαθητές (π.χ. Η Dina van Hiele –Gelfolf σύμφωνα με τις περιγραφές που αναφέρονται με ακρίβεια από τους Fuys, Geddes & Tischler (1988), χρησιμοποίησε tiles (manipulatives) κατά τις έρευνες που διεξήγαγε στην διάρκεια του διδακτορικού της).

Η σύγχρονη μοντελοποίηση με χρήση των αλγεβρικών δομικών μονάδων (algebra tiles) έχει διευκολύνει την κατανόηση των εννοιών της πρόσθεσης ομοσήμεων, ετεροσήμεων αριθμών, την αναγωγή ομοίων όρων σε πολυώνυμα, αλλά και την παραγοντοποίηση πολυωνύμων.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Θέμα: Η μοντελοποίηση της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2$, $\alpha^2-\beta^2$, $(\alpha+\beta)^3$

Το σενάριο επιχειρεί να συνδέσει το γνωστικό πεδίο της γεωμετρίας και της άλγεβρας. Οι μαθητές θα ανασχηματίσουν τα ψηφιακά τεχνουργήματα στην οθόνη του υπολογιστή αξιοποιώντας τις δυνατότητες που παρέχει το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας και θα μοντελοποιήσουν στην οθόνη γεωμετρικά, την αλγεβρική ταυτότητα.

Ευρύτερος στόχος είναι η σύνδεση της εννοιολογικής γνώσης με την διαδικαστική. Δηλαδή, πως οι μαθητές από τον διαδικαστικό χειρισμό των τεχνουργημάτων (στατικών ή ψηφιακών) θα οδηγηθούν στην εννοιολογική κατανόηση. Ακόμα, στην ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης της οπτικής εικονικής αναπαράστασης της έννοιας, στην λεκτική και συμβολική μορφή της έννοιας. Δηλαδή, οι μαθητές θα αναγνωρίσουν οπτικά τη γεωμετρική μορφή της ταυτότητας και θα μεταφράσουν την εικονική αναπαράσταση σε λεκτική και συμβολική, εφαρμόζοντας διαδικαστικά το κατάλληλο θεώρημα για τη λύση του προβλήματος. Η κατανόηση των εννοιών θα επιτευχθεί σε αλληλεπίδραση με στατικά (π.χ. κατασκευή ταυτοτήτων από τους μαθητές με χαρτόνι) και δυναμικά μέσα (π.χ περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας).

Διδακτικοί στόχοι:

Οι στόχοι της διδασκαλίας με την προαναφερόμενη διδακτική προσέγγιση καθορίστηκαν ως ακολούθως: Μέσα από τις διαφορετικές σελίδες του λογισμικού οι μαθητές

- θα διερευνήσουν την ισότητα των δυο μελών στην ταυτότητα, ως αποτέλεσμα του αθροίσματος των εμβαδών των σχημάτων
- θα υπερβούν σημαντικά διδακτικά –επιστημολογικά εμπόδια τα οποία εκδηλώνονται ως λάθη που συνήθως παρατηρούνται κατά την εισαγωγή των εννοιών μέσω φορμαλιστικών διαδικασιών: για παράδειγμα ότι $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$
- θα τους δοθεί η δυνατότητα να σχηματίσουν γεωμετρικά την αλγεβρική ταυτότητα και να συνδέσουν την άλγεβρα με την γεωμετρία. Έτσι, θα κατανοήσουν ότι τα μαθηματικά έχουν νόημα στον πραγματικό κόσμο.
- θα παίξουν και οδηγηθούν μέσα από το παιχνίδι, στην κατανόηση των εννοιών .

Διδακτική προσέγγιση

Προτείνεται

- ιστορική πλαισίωση από το αρχαίο κείμενο των Στοιχείων του Ευκλείδη
- παρουσίαση του μεταγλωττισμένου από τη διδάσκουσα ppt http://www.utdallas.edu/research/prealgebra/pp/documents/Algebra_Tiles.ppt
- παρουσίαση και επεξεργασία έτοιμων υλικών σχετικών με αυτά που προτείνονται στο λογισμικό The Geometer's Sketchpad (Jackiw,1988) (για παράδειγμα χάρτινων τετραγώνων με διαφορετικά χρώματα), προκειμένου οι μαθητές να χειριστούν τα υλικά και να κατασκευάσουν με αυτά τις δικές τους κατασκευές, εικόνες και σύμβολα στη συνέχεια.
- διδασκαλία των ταυτοτήτων στη τάξη

Ως δραστηριότητα προτείνεται

- η κατασκευή σχημάτων που αναπαριστούν ταυτότητες, τριώνυμα,
- η κατασκευή της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^3$ με κατασκευή κύβου ακμών $\alpha+\beta$ (συναρμολογούμενης), έτσι ώστε το κατασκευαστικό αποτέλεσμα να προκύπτει ως άθροισμα των επιμέρους σχημάτων παραλληλεπιπέδων και κύβων.

Οργάνωση της διδασκαλίας

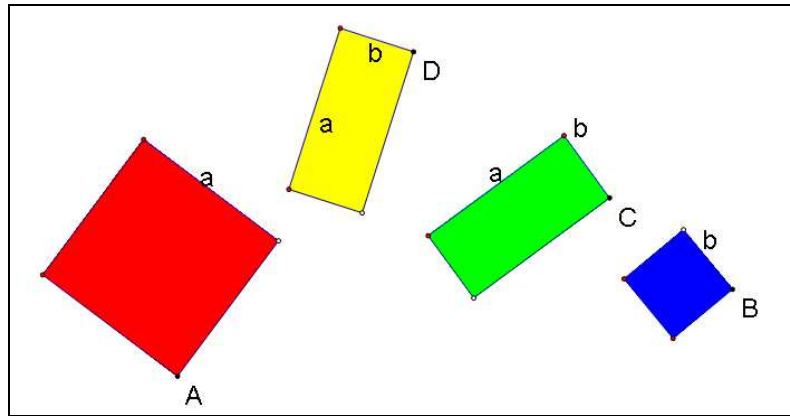
Η διδασκαλία με χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας πραγματοποιήθηκε με το τμήμα Γ3 της Γ τάξης του 1^{ου} Πρότυπου Πειραματικού Γυμνασίου Αθηνών στη βιβλιοθήκη του σχολείου και είχε διάρκεια μιας ώρας, καθώς και στο περιβάλλον της τάξης κατά τις ημερομηνίες που αναφέρονται στο βιβλίο ύλης του τμήματος. Η διδάσκουσα κατασκεύασε και στη συνέχεια χρησιμοποίησε σε συνεργασία με τους μαθητές ένα ημιπροσχεδιασμένο αρχείο πολλαπλών σελίδων λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, εννοιολογικά και διαδικαστικά συνδεδεμένων μεταξύ τους.

Οι μαθητές και η διδάσκουσα χρησιμοποίησαν τον διαδραστικό πίνακα της αίθουσας και οι πρώτοι απάντησαν σε φύλλο εργασίας τα ερωτήματα που τέθηκαν παράλληλα με την αλληλεπίδραση με το αρχείο του λογισμικού.

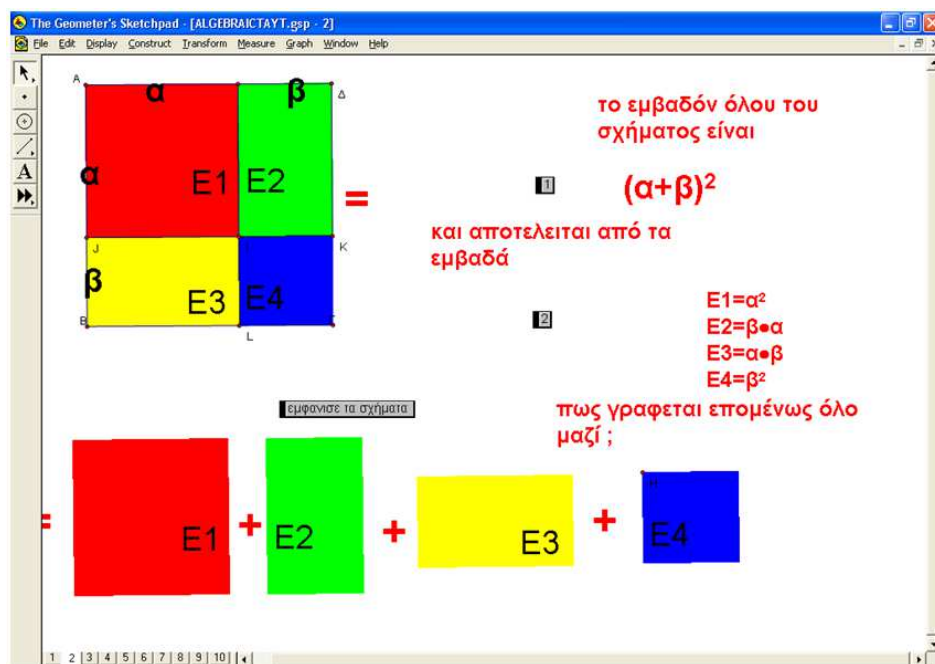
Περιγραφή του αρχείου του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad

1η σελίδα του λογισμικού

Τα σχήματα των τετραγώνων και ορθογωνίων παρέχονται σε τυχαία θέση στην οθόνη και οι μαθητές θα ανακαλύψουν μέσω του συρσίματος το σωστό προσανατολισμό τους, ώστε να κατασκευάσουν την μορφή της ταυτότητας. Για το λόγο αυτό η διδάσκουσα είχε σχεδιάσει τις δραστηριότητες, προβλέποντας την δυνατότητα αλλαγής του προσανατολισμού τους, όταν σύρονται από σημείο - κορυφή του κάθε σχήματος.



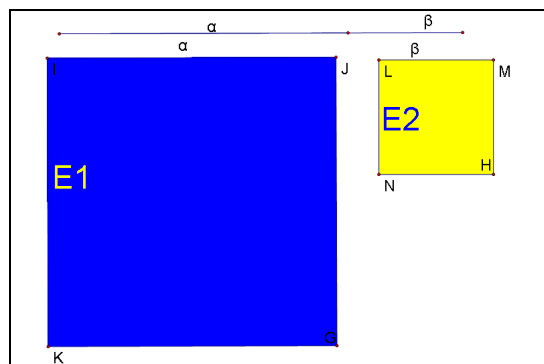
Σχήμα 1



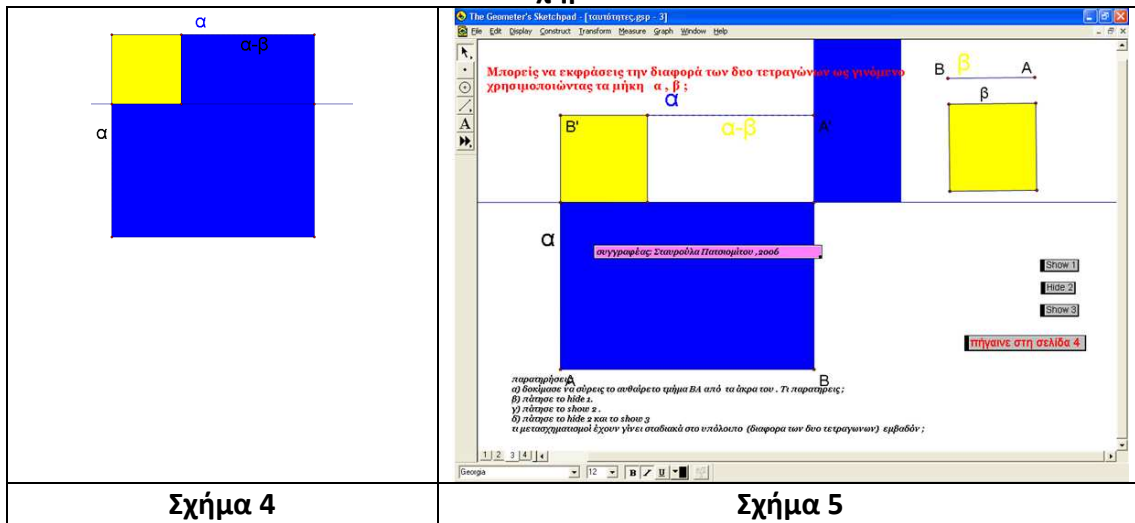
Σχήμα 2

2η σελίδα

Περιλαμβάνει την κατασκευή δυο τετραγώνων των οποίων οι διαστάσεις α , β είναι αλληλοεξαρτώμενες, αφού έχει προβλεφθεί το σύρσιμο του τμήματος β να μην υπερβαίνει το τμήμα α .



Σχήμα 3

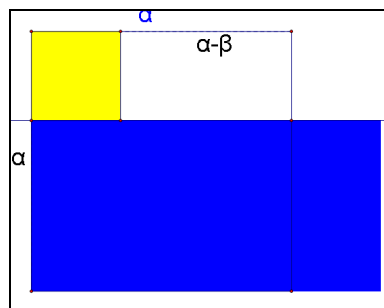


Σχήμα 4

Σχήμα 5

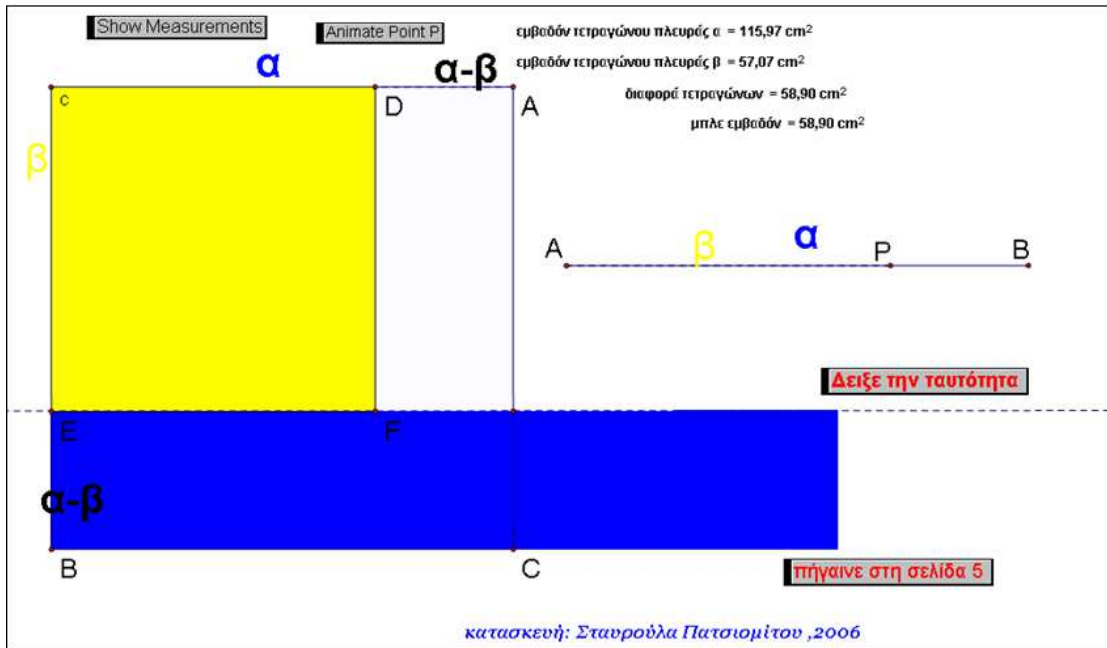
3η σελίδα

Η τοποθέτηση του τετραγώνου με πλευρά β επί του τετραγώνου με πλευρά α ($\beta \leq \alpha$), οδηγεί τους μαθητές στην οπτική αντίληψη της διαφοράς των δυο τετραγώνων.



Σχήμα 6

Στη συνέχεια οι μαθητές θα υπολογίσουν το εμβαδόν του σχήματος που υπολείπεται με διαχωρισμό των εμβαδών των δυο ορθογωνίων που σχηματίζονται. Η απόκρυψη του ορθογωνίου με διαστάσεις $\alpha-\beta$, β και η εμφάνιση του με περιστροφή σε κατακόρυφη θέση, και στη θέση από ανάκλαση του κατακόρυφου ορθογωνίου, καθοδηγεί τους μαθητές να μετασχηματίσουν οπτικά το εμβαδόν του υπολοίπου σχήματος και να οδηγηθούν στην οπτική αποδεικτική διαδικασία.



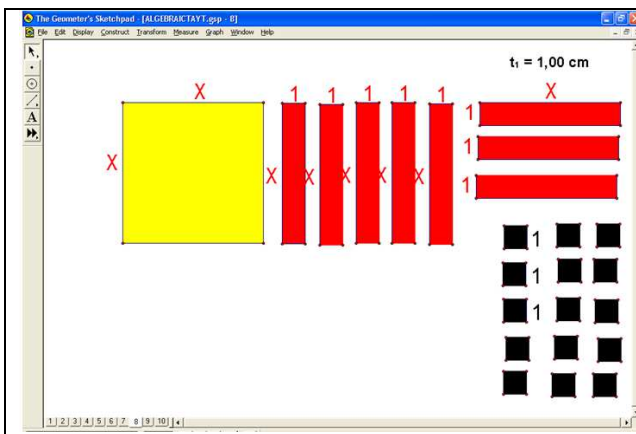
Σχήμα 7

4η σελίδα

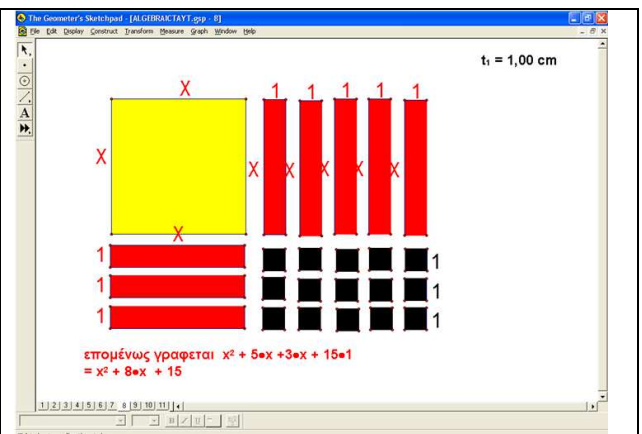
Η διαδικασία επαναλαμβάνεται στην επόμενη σελίδα στην οποία οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να προσθέσουν κίνηση στο σημείο P και να παρατηρήσουν τον μετασχηματισμό των σχημάτων, αλλά και πως μεταβάλλεται το εμβαδόν του υπολοίπου σχήματος (αφαιρουμένων των εμβαδών των δυο τετραγώνων).

5η σελίδα

Στη συνέχεια οι μαθητές θα παραγοντοποιήσουν ένα τριώνυμο (π.χ το $x^2 + 8x + 15$), σύροντας και ανατοποθετώντας τα ψηφιακά τεχνουργήματα στην οθόνη, όπως φαίνεται στο σχήμα 9 κάτω.

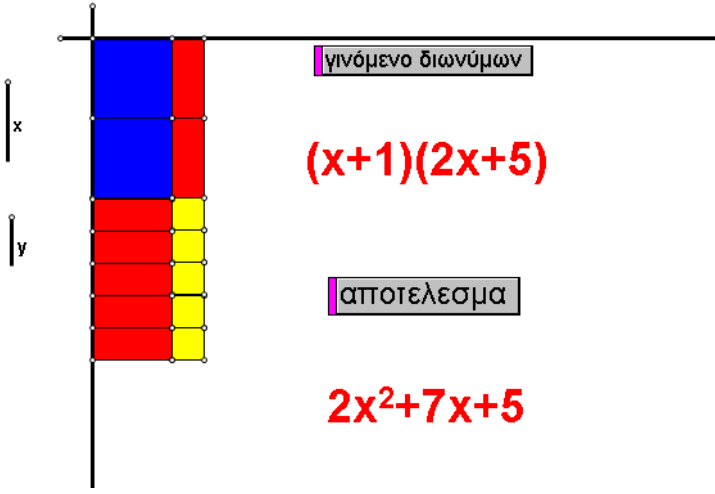


Σχήμα 8



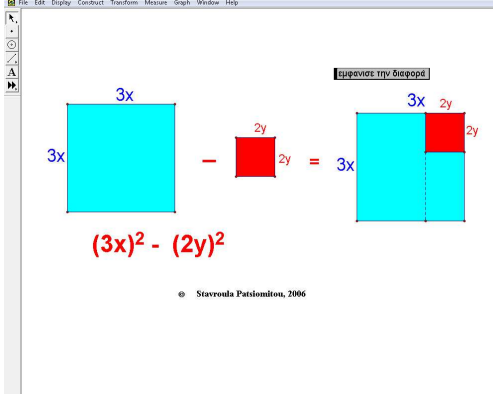
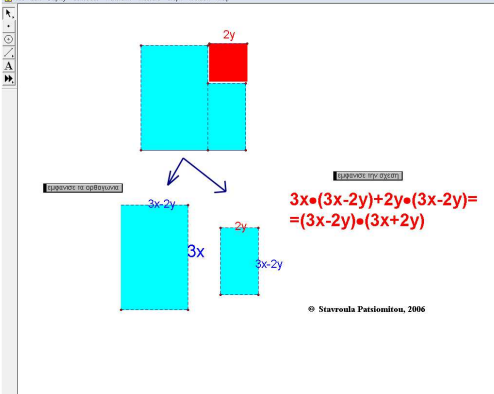
Σχήμα 9

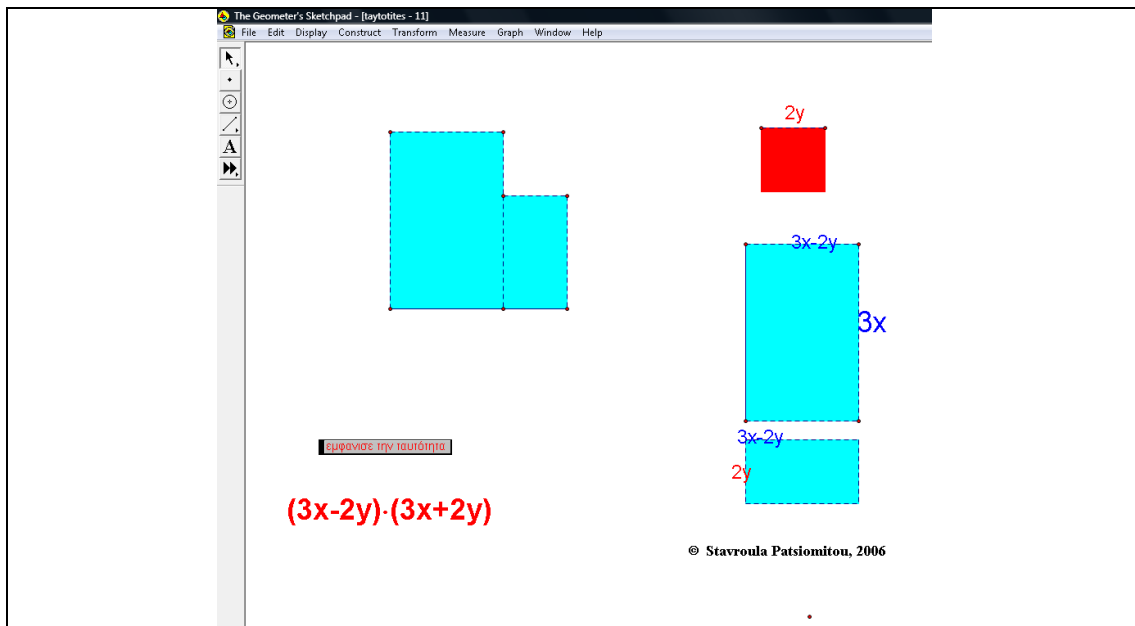
Για πιο σύνθετες μοντελοποιήσεις αλγεβρικών παραστάσεων οι μαθητές θα αλληλεπιδράσουν με τις «αλγεβρικές δομικές μονάδες» του λογισμικού μέσω των οποίων δίνεται η δυνατότητα γεωμετρικών αναπαραστάσεων μαθηματικών αντικειμένων με μορφή custom tools (εργαλείων προκατασκευασμένων στη βιβλιοθήκη του λογισμικού).

	<p>Κατασκευές με αλγεβρικές δομικές μονάδες</p>
<p>Σχήμα 10</p>	

6^η -8^η σελίδα

Οι μαθητές θα πειραματιστούν με τα προκατασκευασμένα ψηφιακά τεχνουργήματα της οθόνης στις συνδεδεμένες σελίδες του λογισμικού, προκειμένου να κατανοήσουν την γεωμετρική μοντελοποίηση της διαφοράς δυο τετραγώνων διαφορετικών διαστάσεων, καθώς και να τη συσχετίσουν με την αλγεβρική έννοια της διαφοράς τετραγώνων. Αυτή θα προκύψει με την αναδιάταξη και αλλαγή προσανατολισμού των γεωμετρικών αναπαραστάσεων.

	
---	--



Φύλλο εργασίας

Σελίδα 1

1. Τοποθετήστε κατάλληλα τα σχήματα, ώστε με αυτά να κατασκευάσετε ένα νέο μεγαλύτερο τετράπλευρο; Τι τετράπλευρο είναι αυτό και γιατί ;

.....

2. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του σχήματος που κατασκευάσατε ;

.....

3. Ποιο είναι το εμβαδόν του συναρτήσει της πλευράς του;

.....

4. Από τα εμβαδά ποιών σχημάτων αποτελείται;

.....

5. Μπορείτε να διατυπώσετε την ισότητα των εμβαδών με αλγεβρικό τρόπο;

.....

Η ισότητα που μόλις κατασκευάσατε είναι η γνωστή μας ταυτότητα ανάπτυγμα τετραγώνου αθροίσματος. Συσχέτισε την ταυτότητα αυτή με την πρόταση 4 του II βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Σελίδα 2

6. Στην εικόνα στην οθόνη παρατηρείτε δυο τετράγωνα με εμβαδά

$$E_1 = \dots\dots\dots \text{ και εμβαδόν } E_2 = \dots\dots\dots$$

.....
.....
.....
.....

7. Τοποθετήστε το τετράγωνο με εμβαδόν E_2 στο τετράγωνο με εμβαδόν E_1 . Πως συμβολίζεται αυτό με αλγεβρικό τρόπο; Μπορείτε να γράψετε την αλγεβρική έκφραση;

υπόδειξη:

Υπολόγισε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά a

Υπολόγισε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά β

Υπολόγισε τη διαφορά των δυο εμβαδών, **δηλαδή τη διαφορά τετραγώνων.**

.....
.....

8. Ποιες είναι οι διαστάσεις των ορθογωνίων παραλληλογράμμων που σχηματίζονται (NZHE και KHBA);

.....
.....
.....
.....

9. Γράψτε την αλγεβρική έκφραση του εμβαδού ως αποτέλεσμα του αθροίσματος των NZHE και KHBA.

.....
.....
.....
.....

Η ισότητα που μόλις κατασκευάσατε είναι η γνωστή μας ταυτότητα διαφορά τετραγώνων. Ποια πρόταση του II βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδη είναι αυτή;

Σελίδα 3

9. Σύρετε το αυθαίρετο τμήμα BA από τα άκρα του. Τι παρατηρείτε;

.....
.....
.....
.....

10. Πως μετασχηματίζεται το εμβαδόν της διαφοράς των τετραγώνων; Γράψτε την αλγεβρική έκφραση.

.....
.....
.....
.....

11. Εκφράστε τη διαφορά των δυο τετραγώνων ως γινόμενο συναρτήσεων των τμημάτων α , β .

.....
.....
.....
.....

Σελίδα 4

12. Αν τροποποιήσουμε το μήκος του τμήματος β , η ταυτότητα θα ισχύει ;

.....
.....
.....
.....

13. Πατήστε το κουμπί προσθήκης κίνησης (animation) του σημείου. Τι μεταβάλλεται τώρα στο σχήμα ;

.....
.....

.....
.....

Σελίδα 5

12. Ποιο το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά x

.....
.....

13. Ποιο το εμβαδόν του ορθογώνιου με πλευρές $x, 1$

.....
.....

14. Σχηματίστε ένα μεγαλύτερο ορθογώνιο ή τετράγωνο με σχήματα που υπάρχουν στην οθόνη. Γράψτε το εμβαδόν του σχήματος (ορθογωνίου) που σχηματίζεται.

.....
.....

18. Στο αρχείο algebra tiles σχεδιάστε την ταυτότητα $5x^2 + 3x + 1$.

.....
.....

Βιβλιογραφία :

- Σταμάτης, Ε. (1975) *Ευκλείδου Γεωμετρία*. Στοιχεία βιβλία 1-4
- Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Monograph No. 3, NCTM.

Διευθύνσεις Διαδικτύου

- <http://plato.acadiau.ca/courses/educ/reid/Virtual-manipulatives/tiles/tiles.html>
- http://www.delmar.edu/aims/Files/Presentations/David_Let's%20Do%20Algebra%20Tiles.ppt
- http://www.phschool.com/professional_development/teaching_tools/pdf/using_algebra_tiles.pdf

Σημείωση: Η παρούσα εργασία είναι αναδιαμόρφωση της δειγματικής διδακτικής πρότασης που παρουσιάστηκε από τους μαθητές του 15^{ου} Γυμνασίου Αθηνών, στην επιμορφωτική συνάντηση που συνδιοργανώθηκε από τους Σχολικούς Συμβούλους των Μαθηματικών κο Μιχ. Μανωλόπουλο και κο Μιχ. Χρυσοβέργη κατά την σχολική χρονιά 2006-2007 (7-12-2006). Το ίδιο σενάριο έχει δεχθεί τις κρίσεις και βελτιώσεις Ελλήνων και διεθνών κριτών, αφού έχει παρουσιαστεί στο Πανελλήνιο συνέδριο της «Αξιοποίησης των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη των ΤΠΕ» (Σύρος, 2007), στο Πανελλήνιο συνέδριο «Ψηφιακό Υλικό για την υποστήριξη του παιδαγωγικού έργου των εκπαιδευτικών» (Νάουσα, 2008) καθώς και ως άρθρο για το περιοδικό «Ευκλείδης Γ» της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ).

Το ερευνητικό μέρος με προσαρμοσμένο θεωρητικό υπόβαθρο έχει δημοσιευτεί στο 13^ο Διεθνές συνέδριο «13th Asian Conference in Technology in Mathematics» (ATCM, 2008) και στη συνέχεια στο Διεθνές περιοδικό «*Electronic Journal of Mathematics and Technology (eJMT)*» (eJMT, 2009).

- Patsiomitou, S., (2008c) Do geometrical constructions affect students algebraic expressions? In Yang, W., Majewski, M., Alwis T. and Klairree, K. (Eds.) "Enhancing Understanding and Constructing Knowledge in Mathematics with Technology". *Proceedings of the 13th Asian Conference in Technology in Mathematics*. pp 193-202 Bangkok, Thailand: Suan Shunanda Rajabhat University. Available on line <http://atcm.mathandtech.org/EP2008/pages/regular.html>
- Patsiomitou, S. (2009). The Impact of Structural Algebraic Units on Students' Algebraic Thinking in a DGS Environment at the *Electronic Journal of Mathematics and Technology (eJMT)*, 3(3), 243-260.